טורים

סכום אינסופי של מספרים

לדוגמה

רוצים להגדיר התכנסות של טור. יהי . נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים:

, שווה לסכום n האיברים הראשונים של הטור. נגדיר את סכום הטור להיות גבול סדרת הסכומים החלקיים. כלומר אם קיים אזי הטור מתכנס ושווה

# שאלה

איך נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של טור באמצעות כלל נסיגה?

## תשובה

## הערה

נגדיר , אזי

# דוגמה

, חשב את

## תשובה

*לסיכום , =>*

# שאלה

למה שווה ?

## תשובה

# שאלה

האם מתכנס?

## פתרון

נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים. . שבוע שעבר הראנו ש הנ"ל אינה סדרת קושי ולכן אינה מתכנסת ולכן לפי ההגדרה מתבדר.

# שאלה

האם מתכנס?

## פתרון

ראינו גם בשבוע שעבר ש מתכנסת ולכן הטור מתכנס.

# הערה

יהי טור מתכנס, אזי

## הוכחה

# שאלה

נניח . האם בהכרח הטור מתכנס?

## תשובה

לא, נפריך ע"י הדוגמה

## שימו לב

אם או אזי בהכרח מתבדר.

# תרגיל

הוכח כי הטור מתכנס ומצא את סכומו:

## פתרון

. נמצא את A וB:

נציב : . נציב : . כלומר .   
לכן . רוצים לחשב את :

*ניתן להוכיח את זה באינדוקציה, לכן:*

# משפט(אריתמטיקה של טורים)

אם , B, , אזי:

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

# השוואה I

נניח ש אזי:

1. אם מתכנס => מתכנס
2. אם מתבדר => מתבדר

## הערה

אם קל לראות שסדרת הסכומים החלקיים של הטור מונוטונית עולה:

# תרגיל

האם מתכנס?

## פתרון

לכן , לכן מתבדר

# מבחן ההשוואה השני

יהיו , טורים חיוביים(). אם קיימים כך ש החל מ מסויים, אזי מתכנס ⬄ מתכנס.

# תרגיל

– האם מתכנס?

## פתרון

נכפיל בצמוד, נקבל:

נשווה עם :  
ניקח . ניקח ולכן , לכן החל מ. לכן לפי מבחן ההשוואה השני ומכך שידוע ש מתבדר קיבלנו ש מתבדר.

# מבחן השורש של קושי

נתון טור חיובי ממש(). אזי:

1. אם הטור מתכנס
2. אם הטור מתבדר
3. אם לא ניתן לדעת

# מבחן דאלמבר

נתון טור חיובי ממש

1. אם הטור מתכנס
2. אם הטור מתבדר
3. אם לא קבוע

# דוגמאות

1. => מתכנס לפי מבחן ההשוואה הראשון.
2. . נשים לב ש. נפעיל מבחן קושי בפרט ולכן הטור מתכנס.
3. . ברור שעבור – נניח . ולכן ע"פ מבחן דלאמבר(מבחן המנה) הטור מתכנס.
4. :  
   לכן הטור מתכנס.

# מבחן העיבוי

תהי מונוטנית יורדת כך ש . אזי מתכנס ⬄ מתכנס

# תרגיל

מתי מתכנס?

## תשובה

לפי מבחן ההשוואה עבור הטור מתכנס ועבור הטור מתבדר. מה קורה בין לבין?

קל לוודא שתנאי מבחן העיבוי מתקיים, כלומר מונוטונית יורדת. לכן מתכנס ⬄ מתכנס:. זהו טור הנדסי עם

נראה באופן כללי מתי טור הנדסי מתכנס:

*אם אזי ולכן*

*אם מתבדר*

אם אזי ולכן מתבבדרת

סה"כ מתכנס ⬄ וסכומו במקרה זה הינו

נחזור לתרגיל: מתכנס ⬄ כלומר כלומר

# משפט לייבניץ

אם מונוטונית יורדת ו ו אזי מתכנס.

## מסקנה

הטור מתכנס.